

# 数学应用题心理表征的研究现状与动态<sup>\*</sup>

仲宁宁<sup>1 2</sup> 陈英和<sup>2</sup> 张 璟<sup>2 3</sup>

(1. 北京青年政治学院 社会工作系, 北京 100102 2. 北京师范大学 发展心理研究所, 北京 100875 3. 江西师范大学 教育学院, 南昌 330022)

**摘 要** 心理表征是问题解决的关键, 该文阐述了在数学应用题中心理表征的理论, 探讨了心理表征的内部影响因素, 最后总结了目前在应用题心理表征的研究中, 心理学家们关注的一些问题。

**关键词** 数学应用题 心理表征

中图分类号: B842.5

文献标识码: A

文章编号: 1003-5184(2008)01-0039-05

## 1 引言

近年来, 表征问题正成为学校数学中教与学的研究焦点(National Council of Teachers of Mathematics NCTM, 2001)<sup>[1]</sup>。心理表征指在原有认知结构的基础上将外部信息以自己独特的方式或形式组织起来, 并建构出一定的结构和意义。心理表征包括符号建构、概念意义的确立、视觉图式、空间图式和策略启发等过程, 同时与问题相联系的情绪情感因素(如个体的态度、信念和价值观等)可促进或阻碍对问题的理解(DeBellis, 1996; Goldin, 2000)。

良好的心理表征促进个体对知识的正确理解。面对问题时, 个体最重要的是先理解外部呈现的材料, 理解过程实际上就是个体用自己独特的方式重新组织这些材料的过程, 目的是使材料中的重要信息以某种逻辑结构联系起来。在良好的心理表征的基础上, 个体才能够准确的筛选信息, 并选择适当的策略组织信息以解决问题。所以, 正确的问题表征是解决问题的必要前提, 在错误的问题表征中是不可能求得问题的解决。文章拟从数学应用题心理表征理论、心理表征的内部影响因素等方面对心理表征领域近年来的主要研究成果进行总结和分析, 并指出了研究者在该领域研究中一些关注的问题。

## 2 数学应用题心理表征理论

### 2.1 表象表征论

Presmeg<sup>[2]</sup>提出的表象表征理论最突出的特征是

将个体对视觉表象或图表的喜好程度设置为一个连续体。在该理论中, Presmeg 重点分析了个体在解决数学应用题时使用的各种表征形式的特点及有效性, 由此说明了为什么视觉表象并不一定促进数学问题的解决, 有时甚至还会起到妨碍作用。该理论认为, 中学生在解决数学问题时常用五类表象: 1) 具体的图形表象(在脑中出现图形); 2) 模式表象(以视觉—空间格式勾勒出纯粹的关系); 3) 动觉表象(包括手的运动和其他的手势); 4) 动态表象(包括对几何图形的动态转换); 5) 对公式的记忆(将数学公式以视觉化的方式提取出来, 进行问题解决)。虽然这五种表象形式各有用途, 但是模式表象在数学问题解决中起着关键的作用, 因为它显示出了问题信息之间的关系, 更有利于个体进行抽象和概括。具体图形表象在解决数学问题中是不太有效的表象形式, 因为它会使学生拘泥于对无关细节的推理而忽视原问题表征中的重要成分。Presmeg 研究发现, 对问题关系能够进行很好理解的问题解决者倾向使用模式表象和动态表象, 而对问题关系不能很好理解的问题解决者倾向使用具体表象和记忆表象。

### 2.2 图式—图像表征论

图式—图像表征论<sup>[3]</sup>是在 Presmeg 的理论基础上演生而来的, Hegarty 对 Presmeg 理论进行了简化, 将视空间表征形式仅区分为两种类型, 即图像表征

<sup>\*</sup> 基金项目: 全国教育科学规划国家重点项目(ABA050001)、教育部人文社会科学重点学科基地项目(02JAZJDXLX002)、北京市哲学社会科学规划项目。

通讯作者: 陈英和, E-mail: yinghechen@263.net。

(pictorial imagery)和图式表征(schematic imagery)。前者是建构生动详细的视觉图像,包括对问题中的人物、地点和事件进行编码,后者建构物体之间的空间关系,并进行空间上的转换。他们还采用 MPI 测验(Mathematical Processing Instrument test)考察了这两种表征与数学问题解决以及空间能力的关系。结果发现,运用图式表征与成功解决数学问题间呈正相关,而运用图像表征与成功解决数学问题间呈负相关。空间能力中的空间视觉化能力与图式表征有正相关,却与图像表征无关。干预研究发现,当学生掌握了如何画图和建立图式表征后,他们的成绩有了显著提高<sup>[4]</sup>。

基于前人的研究,曾盼盼等人<sup>[5]</sup>对我国小学四~六年级儿童的表征方式进行了研究。结果发现,在小学高年级阶段,五、六年级学生数学问题解决的正确率、使用图式表征策略的程度显著高于四年级学生,而使用图像表征策略的程度各年级无显著差异。实验中发现,四年级儿童极少主动使用画图表的策略帮助解题;五年级儿童在解题过程中常机械地将画图表作为解题的一道必要程序,其解题过程与画出的图表关系有时不甚紧密;六年级儿童在使用图式表征时则更具有计划性、灵活性,在必要时才借助画图表,而且会根据需要画出一部分或全部。这说明,五年级可能是图式表征策略的过渡阶段。

### 2.3 直接转换-问题模型表征论

一些学生可顺利地解决数字题,但在需要相同计算能力的应用题中却常常出现错误。研究发现,这些学生在解决问题上没有困难,而在数学表征上存在困难,即在理解问题上存在困难。基于此,May-er 等人<sup>[6]</sup>提出直接转换-问题模型表征论,该理论说明了学生在数学问题解决中的困难在于其问题表征上,而不在数学操作上;问题表征的困难在于理解条件关系上,而不在理解单独条件上;理解条件关系的困难在于使用了直接转换策略,而没有使用问题模型策略。该表征论认为,在数学心理表征中存在两种基本的策略—直接转换策略(direct translation strategy)和问题模型策略(problem-model strategy)。直接转换策略是指当面对数学应用题时,个体首先从题中选取所含数字和关键词,然后对数字进行加工,其中强调对量的推理,即运算过程;问题模型策

略是指当面对数学应用题时,个体首先试图理解问题情境,然后根据情境表征制定计划,其中强调对质的推理,即理解问题中条件之间的关系。

### 2.4 三水平表征论

三水平的表征论是依据个体对问题概念的抽象概括水平和操作水平的不同而进行分类的。问题解决的水平反映了问题解决者内部概念结构的认知形式,这种认知形式有利于问题解决者组织自己的经验,以对新情境中的问题进行理解。Cifarelli<sup>[7]</sup>认为,应用题解决活动包括三个概念结构水平:再认(recognition)、再组织(representation)和结构抽象化(structural abstraction)。

再认是概念结构的最初水平。当个体理解任务之间的相似性时,就能够对当前认知活动进行再认。这个水平属于基础结构,个体没有显示出对潜在认知活动的高水平意识。因为问题相似性决定了他们将使用先前的办法解决问题,很少考虑为什么和如何在新情境中使用该办法,这一水平只反映了问题解决的表面活动,而没有潜在活动。在一些问题解决的表征模型中,再认是认知机能的最高水平,许多传统的教科书也将该水平作为学生认知机能发展的目标;当个体对认知活动进行重新组织时,即不仅在新的情境中对先前的问题解决活动进行再认,而且参与到问题解决情境之中时,个体的概念结构达到了再组织水平,经过这种重新组织活动,相关的数学关系得以建构,结构抽象化是高水平的加工活动,当个体能够再组织潜在的认知活动,并进行操作时,则出现这一水平。概念结构的这个水平是操作性的,也就是说,个体能够在表征的基础上对新异的数学问题进行重新组织和加工。

总之,由上面介绍的有关应用题表征的理论,可以发现问题表征过程大致可以分为两个步骤:1)表层编码阶段。解题者阅读问题材料,能够根据问题的表面信息重述问题条件及问题目标;2)深层编码阶段。解题者在问题表层理解的基础上,进一步对问题的内部结构特征进行综合理解,这对个体的知识结构体系提出了更高的要求。一些问题解决者的表征水平停留在表层编码阶段,对问题解决的速度较快,但容易受表面信息的影响,使问题解决发生错误。有效的问题解决者的表征水平应发展到深层编

码阶段,对问题的内部结构特征进行解释和加工,虽然问题解决的速度也许较慢,但是问题解决的正确率得到了保障。

### 3 心理表征的内部影响因素

影响儿童应用题心理表征的影响因素有很多,以下将从个体的内在心理基础出发,从元认知、工作记忆和概念性知识等方面阐述它们对心理表征的影响。

#### 3.1 元认知

元认知是指对认知活动进行监控和调节的过程。随着研究的兴起,人们发现学习不仅是对材料的识别、加工和理解过程,同时也是对该过程进行监控和调节的元认知过程。在数学认知活动中,尤其是解决数学应用题的活动中,需要各种认知因素的参与,而在这个过程中,更需要主体不断地对认知活动进行监控、管理、选取策略以及调整思路等,这些调控都离不开元认知的参与。

当面临某个应用题时,个体已有的关于该问题的元认知知识激起了元认知体验。结合元认知知识和元认知体验,元认知监控开始判断哪一种认知图式与个体先前的知识和期望是一致的,哪一种图式可以达到对于问题的解决。经过不断的比较之后,最终选择并使用了某种认知图式对问题进行了解答<sup>[8]</sup>。

#### 3.2 工作记忆

工作记忆是容量有限的加工资源,其在储存信息的同时,还要对该信息或其它信息进行即时加工,这和短时记忆概念仅强调储存功能是不同的。工作记忆是个资源有限的系统,当任务对工作记忆要求高,使得认知超负荷时,就会产生资源分配不足的问题,从而影响学习或问题解决的效率。一些研究也发现,工作记忆与个体的数学成绩有着密切的关系。最早发现心算成绩与解题者保持和加工信息能力有关的是 Hitch<sup>[9]</sup>,他发现如果解题者在心算时忘记了初始信息或中间步骤的结果就会产生计算错误,因此心算错误是由于与问题有关的信息在记忆中产生衰退造成的。在应用题情境表征中,非常重要的推论过程是在中央执行的监控和调节下,在语音环路和视空间模板的参与下进行的,所以工作记忆容量越大,个体就越多使用情境信息来进行因果推理<sup>[10]</sup>。

以上研究结果表明,对工作记忆容量较大的个

体来说,由于当前的任务没有超出其工作记忆能力所能承受的限度,他们有足够的认知资源对任务进行加工和复杂的表征,因而会取得良好的学习效果;对工作记忆容量较小的个体来说,由于当前的任务所产生的认知负荷超出了其工作记忆能力所能承受的限度,导致认知资源不足,不能对任务进行有效地加工和表征,从而影响学习成绩。

#### 3.3 概念性知识

与程序选择、程序监控和将程序性知识转换到新情境中等过程相联系的概念性知识对于儿童的数学问题解决非常重要。Hiebert 与 Weame 发现<sup>[11]</sup>,大部分具有概念性知识的学生可自创新的问题解决程序,而不具有概念性知识的许多学生只是使用标准的解决程序。正如 Geary<sup>[12]</sup>所说的,概念性知识与灵活性是紧密联系的。解决数学应用题,概念性知识是前提条件,具备了概念性知识就可以选择恰当的表征。

教师经常鼓励学生对解题的程序过程进行记忆,特别是在特殊教育的数学指导中,教师更多强调的是对计算过程的机械记忆,而忽视概念性知识和将数学应用到现实问题情境中的能力。研究者认为程序性指导使得学习不良儿童变成了被动的学习者,无法对数学中的核心概念和规则进行理解,所以他们也缺乏高级数学技能<sup>[13]</sup>。数学教学应强调建立概念性知识、陈述性知识和程序性知识三者之间的关系,学生不应只关注数学计算,还必须理解数学知识的本质,这样才能进行更广泛的数学推理,以便在不同情境中建立对问题的表征。

### 4 研究动态

目前在应用题心理表征的研究中,心理学家们关注的问题有:

第一,在儿童期,心理表征的形式从单一的视空表征渐渐转向多维表征,儿童对物体的表征不再单纯依赖于形态,而开始越来越多地使用语音复述。儿童对数学应用题的解决离不开视空表征形式,同时也离不开语音表征形式,因为应用题作为一种具有情境化的数学问题是离不开文本阅读的,个体需要译解每个词语,然后获得每个词语的正确发音,进而理解整个句子,明白问题内容。Palmer<sup>[14]</sup>认为,尽管早期阶段信息表征的发展涉及基本知觉与感觉运

动功能的精细化,但随后的发展取决于工作记忆中负责整合复杂加工的神经网络的成熟和问题的特点,所以今后有必要对视空表征和语音表征在数学应用题解决中的作用关系这一问题进行研究。

第二,大量研究显示,学校中的应用题练习与数学化和数学建模的思想并不相符,学生们在进行问题解决的时候,忽略了现实信息。他们通常从题目描述中选择一种运算形式,选择主要依据题目中的表面信息,如关键词和数字,或是先在大脑中搜索四种基本运算的初始模式,然后判断该题目中所描述的情境与哪一种相一致,之后将题目中的数字套入被激活的运算形式中,执行计算并报告结果。学生们一般不再返回到问题情境中验证结果是否合理。传统教学提供的刻板、规范的应用题促成并强化了学生的这种解题策略,使他们更擅长用这种刻板的表征解答常规应用题,但一旦碰到非常规应用题,这种表征就失去了功效<sup>[15]</sup>。近年来,研究者越来越重视应用题的规范性对学生解题过程的影响,并对其影响原因提出了各自的见解。

第三,研究者们已经意识到在问题解决过程中心理表征的重要作用,因此都在试图寻找有效的心理表征训练方式。如 Jitendra 等人<sup>[16]</sup>在一项研究中考查了学习障碍儿童在经过心理模型训练后解决应用题的成绩。控制组儿童直接接受应用题测试,实验组则要先经过表征模型训练,如教师列出应用题的情境模型,对模型进行解释,着重说明关键信息,对规则进行概括等,然后进行测试。研究结果发现,实验组儿童解题的正确率有了显著提高,并且超过了同年龄正常儿童的平均水平。在训练后第二周和第四周对这些儿童进行再测,发现他们的成绩( $M = 86\%$ )仍然远远超过同龄正常儿童( $M = 54\%$ )。研究表明,心理表征模型可有效地提高学习障碍儿童在加法和减法应用题上的成绩,并具有很好的持续性。

总之,数学应用题心理表征的研究内容正在进一步拓展和加深,研究手段也日益精确化和科学化。该领域的研究可帮助人们更加清晰地了解小学儿童表征数学问题的特点及内在机制,掌握小学儿童数学思维变化的规律。同时,应用题教学一直是教师感到比较头疼的问题,通过心理表征方面的研究可试图寻找应用题教学中的突破点,指导教师在今后

的教学中应以学生的心理特点为基础,寻找适合的教育方法,采用适当的教学方式、教学材料和教学安排,使教育能够走在心理发展的前面,通过教育促进学生的身心发展。

## 参考文献

- 1 Goldin G, Shteingold. Systems of Representations and Development of Mathematical Concepts. National Council of Teachers of Mathematics 2001. 1 - 23.
- 2 Presmeg N C. Visualization and Mathematical Giftedness. Educational Studies in Mathematics, 1986b, 117: 297 - 311.
- 3 Hegarty M, Kozhevnikov M. Types of Visual - Spatial Representations and Mathematical Problem Solving. Journal of Educational Psychology, 1999, 91(4): 684 - 689.
- 4 Jitendra A K, Hoff K. The Effects of Schema - based Instruction on the Mathematical Word - problem - solving Performance of Students with Learning Disabilities. Journal of Learning Disabilities, 1996, 29: 422 - 431.
- 5 曾盼盼, 俞国良. 小学生视觉—空间表征类型和数学问题解决的研究. 心理科学, 2003, 26(2): 268 - 271.
- 6 Hegarty M, Mayer R E, Green C. Comprehension of Arithmetic Word Problems Evidence From Students' Eye Fixations. Journal of Educational Psychology, 1992, 84(1): 76 - 84.
- 7 Cifarelli V V. The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity. Journal of Mathematical Behavior, 1998, 17(2): 239 - 264.
- 8 Teong S K. The Effect of Metacognitive Training on Mathematical Word - problem Solving. Journal of Computer Assisted Learning, 2003, 19: 46 - 55.
- 9 Hitch G J. The Role of Short - term Working Memory in Mental Arithmetic. Cognitive Psychology, 1978, 10: 302 - 323.
- 10 Gathercole S E, Tiffany C, Briscoe J, et al. The ALSPAC team. Developmental Consequences of Poor Phonological Short - term Memory Function in Childhood: A Longitudinal Study. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 2004, 45: 1 - 14.
- 11 Hiebert J, Weame D. Instruction, Understanding, and Skill in Multidigit Addition and Subtraction. Cognition and Instruction, 1996, 14: 251 - 283.
- 12 Geary D C. Reflections of Evolution and Culture in Children's Cognition. American Psychologist, 1995, 50: 24 - 37.
- 13 Montague M, Woodward J, Bryant D P. International Perspectives on Mathematics and Learning Disabilities: Introduction to the Special Issue. Journal of Learning Disabilities, 2004, 37(1):

2 – 3.

14 Palmer S. Working Memory : A Developmental Study of Phono-logical Recoding. Memory 2000 8 :179 – 193.

15 Leong C K ,Jerred W D. Effects of Consistency and Adequacy of Language Information on Understanding Elementary Math-ematics Word Problems. Annals of Dyslexia ,2001 ,51 :277 – 298.

16 Jitendra ,Asha K Hoff ,Kathryn B ,et al. . Teaching Middle School Students With Learning Disabilities to Solve Word Prob-lem Using a Schema – based Approach. Remedial and Special Education ,1999 ( 20 ) 50 – 64.

Research Situation and Trends of Mathematical

Word – problem ’s Mental Representation

Zhong Ningning<sup>1 2</sup> ,Chen Yinghe<sup>2</sup> ,Zhang Jing<sup>2 3</sup>

- ( 1. Social Work School , Beijing Youth Politics College , Beijing 100102 ;
2. Institute of Developmental Psychology , Beijing Normal University , Beijing 100875 ;
3. Psychology School , Jiangxi Normal University , Nanchang 330022 )

**Abstract** :Mental representation is crucial to problem solving. Mental representation ’s theories of mathematical word problem were produced in the paper. In addition ,the internal factors of mental representation were discussed. Finally ,the issues focused on the psychologists in the field of mathematical word problem ’s representation were concluded.

**Key words** :mathematical word – problem ,mental representation